SESSION DE 1985

(6407)

# MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

## PRÉAMBULE

Ce problème est consacré à l'étude de la question suivante : étant donné deux polygones du plan (resp. : deux polyèdres de l'espace) de même aire (resp. : de même volume), peut-on découper le premier en morceaux et déplacer ces morceaux de façon à reconstituer le second?

La partie I met en place les données et fournit quelques résultats généraux. La partie II est l'étude du problème en dimension 2 et la partie III constitue une première approche de cette étude en dimension 3. La partie IV construit les outils nécessaires à une étude plus approfondie, abordée dans la partie V.

## DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Soit $n$ un entier naturel au moins égal à 2 et soit E un espace affine réel euclidien de dimension $n$, muni de sa topologie usuelle. On notera comme d'habitude $\mathring{X}$ et $\overline{X}$ l'intérieur et l'adhérence d'une partie X de E.

On appelle *simplexe* de E toute partie S de E qui est l'enveloppe convexe de $n + 1$ points affinement indépendants de E; l'ensemble de ces $n + 1$ points est uniquement déterminé par S : c'est l'ensemble des *sommets* du simplexe S.

Soient X et Y des parties de E; on dira qu'elles sont *quasi disjointes* lorsque leurs intérieurs sont disjoints, c'est-à-dire $\mathring{X} \cap \mathring{Y} = \varnothing$. Soient $X_1, \dots, X_k$, X des parties de E; les notations

$$X = \coprod_{i=1}^{k} X_i \quad \text{ou} \quad X = X_1 \coprod X_2 \coprod \dots \coprod X_k$$

signifient : pour tous $i, j$ tels que $1 \leqslant i < j \leqslant k$ les parties $X_i$ et $X_j$ sont quasi disjointes et la réunion des $X_i$ est X.

On appelle *polyèdre* de E toute partie (éventuellement vide) de E qui est la réunion d'un ensemble fini de simplexes deux à deux quasi disjoints.

On distingue parmi les polyèdres de E les *polytopes* : ce sont les polyèdres convexes non vides de E; on admettra que les polytopes de E sont aussi caractérisés parmi les polyèdres par l'une des propriétés suivantes :

1° Il existe une partie finie génératrice de E dont le polytope est l'enveloppe convexe;

2° Il existe une famille finie de demi-espaces fermés dont le polytope est l'intersection.

On admettra de plus les résultats suivants sur les polytopes : soit P un polytope; alors :

*a.* Soit $k$ le nombre minimal de points dont P est l'enveloppe convexe. Alors il existe une et une seule partie ayant $k$ éléments dont P est l'enveloppe convexe; c'est l'ensemble des *sommets* de P. Dans le cas particulier des simplexes, on retrouve la même notion de sommet;

*b.* Soit $m$ le nombre minimal d'éléments d'un ensemble de demi-espaces fermés dont P est l'intersection; alors il existe un et un seul tel ensemble ayant $m$ éléments. Soit $\{F_1, \dots, F_m\}$ cet ensemble; la frontière $H_i$ de $F_i$ est un *hyperplan facial* de P. La frontière de P est la réunion des $H_i \cap P$, et chaque $H_i \cap P$ est un polytope de $H_i$, appelé *face* de P.

**Tournez la page S. V. P.**

On admettra sans démonstration que toutes les notions introduites ci-dessus sont invariantes par isométrie (et plus généralement par bijection affine).

On appellera *décomposition* d'un polyèdre P toute famille finie de polytopes deux à deux quasi disjoints dont P est la réunion. Soient $(P_1, \ldots, P_s)$ et $(P'_1, \ldots, P'_t)$ des décompositions du polyèdre P; on dira que $(P'_1, \ldots, P'_t)$ est plus fine que $(P_1, \ldots, P_s)$ si tout $P'_j$ est inclus dans au moins un $P_i$.

## Partie I. — LES INVARIANTS DE DÉCOUPAGE

Dans cette partie, $n$ est quelconque.

I.1. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polyèdres deux à deux quasi disjoints; montrer que leur réunion est un polyèdre.

I.2. *a.* Montrer que tout polyèdre est l'adhérence de son intérieur. On pourra commencer par le cas des simplexes.

*b.* Montrer que si P′ est un polyèdre quasi disjoint de P, alors $\mathring{P}' \cap P = \varnothing$ .

I.3. Montrer que si $P_1, \ldots, P_k$, P sont des polyèdres deux à deux quasi disjoints, alors les polyèdres $P_1 \coprod \ldots \coprod P_k$ et P sont quasi disjoints.

I.4. Soit P un polyèdre; soit $(P_i)$ une décomposition de P, et soit $(P'_j)$ une décomposition de P plus fine que $(P_i)$; montrer que chaque $P_i$ admet une décomposition formée de certains $P'_j$.

I.5. Soit P un polyèdre; soit $(H_1, \ldots, H_m)$ une famille finie d'hyperplans de E, contenant les hyperplans faciaux des polytopes d'une décomposition de P; montrer qu'il existe une seule décomposition $(P_1, \ldots, P_r)$ de P telle que

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^{m} H_i = \bigcup_{j=1}^{r} \mathring{P}_j$$

(on pourra, pour chaque point de $\mathring{P}$, considérer l'ensemble des demi-espaces ouverts qui le contiennent et qui ont pour frontière l'un des $H_i$).

Ce type de décomposition sera appelé *dissection* de P.

I.6. Étant donné deux décompositions $(P_i)$ et $(Q_j)$ d'un polyèdre P, montrer qu'il existe une dissection $(R_k)$ de P telle que chaque $P_i$ et chaque $Q_j$ admette pour dissection une sous-famille de $(R_k)$.

Soit $\Pi$ (resp. $\Pi_c$) l'ensemble des polyèdres (resp. des polytopes) de E. Soit A un groupe commutatif noté additivement; on dit qu'une application $f$ de $\Pi_c$ dans A est *additive* lorsque pour tout polytope P et toute dissection de P en deux polytopes $P_1$ et $P_2$ on a :

$$f(P) = f(P_1) + f(P_2)$$

I.7. Soit $f$ une application additive de $\Pi_c$ dans un groupe commutatif $\mathcal{A}$.

*a.* Montrer que pour tout polytope P et toute décomposition $(P_i)$ de P on a :

$$f(P) = \sum_i f(P_i)$$

(on pourra traiter d'abord le cas d'une dissection).

*b.* Montrer qu'il existe une unique application $\overline{f}$ de $\Pi$ dans $\mathcal{A}$ qui prolonge $f$ et telle que l'on ait

$$\overline{f}(P \coprod P') = \overline{f}(P) + \overline{f}(P')$$

pour tous polyèdres quasi disjoints P et P′.

Soit G un groupe d'isométries de E. On dira que deux polyèdres P et Q sont G-*équidécomposables* et l'on écrira $P \underset{G}{\approx} Q$, s'il existe des décompositions $(P_i)$ de P, $(Q_i)$ de Q, et des éléments $(g_i)$ de G, $i = 1, 2, \ldots, s$, tels que l'on ait $g_i(P_i) = Q_i$ pour tout $i$.

I.8. Montrer que la relation $P \underset{G}{\approx} Q$ est une relation d'équivalence sur $\Pi$.

I.9. Montrer que si deux polyèdres admettent des décompositions $(P_i)$ et $(Q_i)$ telles que $P_i$ et $Q_i$ soient G-équidécomposables pour tout $i$, alors P et Q sont G-équidécomposables.

I.10. Soit $f$ une application additive de $\Pi_c$ dans le groupe $\mathcal{A}$ et soit $\overline{f}$ son prolongement à $\Pi$.

On suppose que pour tout $g$ de G, et pour tout polytope P, on a $f(g(P)) = f(P)$.

Montrer que l'on a $\overline{f}(P) = \overline{f}(Q)$ pour tout couple de polyèdres G-équidécomposables (P, Q).

Une telle application $\overline{f}$ sera appelée dans la suite un invariant de G-découpage.

On admettra en particulier que pour $n = 2$ (resp. 3), l'aire (resp. le volume) dans E est un invariant de G-découpage à valeurs réelles pour tout groupe d'isométries G.

## Partie II. — ÉQUIDÉCOMPOSABILITÉ DANS LE PLAN

Dans cette partie, on suppose $n = 2$. Selon l'usage, on appellera polygones les polyèdres et polygones convexes les polytopes de E.

Un parallélogramme est l'enveloppe convexe de quatre points non alignés A, B, C, D, tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; on parlera alors du parallélogramme (ou du rectangle, ou du carré) ABCD. Les simplexes de E sont appelés triangles.

On désignera par T le groupe des translations de E et par S le groupe engendré par T et une symétrie par rapport à un point.

II.1. Donner les éléments de S.

II.2. Soient ABCD et A'B'C'D' deux parallélogrammes tels que A = A', B = B' et que C, D, C', D' soient alignés. Montrer que ABCD $\underset{T}{\approx}$ A'B'C'D'.

II.3. Montrer que tout triangle est S-équidécomposable à un parallélogramme.

II.4. En déduire que tout polygone est S-équidécomposable à une réunion de rectangles d'intérieurs disjoints.

II.5. Soit ABCD un rectangle tel que $||\overrightarrow{AB}|| = a$, $||\overrightarrow{AD}|| = b$, $0 < b < a$.

*a.* Montrer que ABCD est T-équidécomposable à un carré. On pourra considérer le carré AB'C'D' défini par $\overrightarrow{AB'} = -(\sqrt{b}/\sqrt{a})\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD'} = -(\sqrt{a}/\sqrt{b})\overrightarrow{AD}$.

*b.* Soit H une droite passant par A telle que ABCD soit d'un même côté de H. Soit A'B'C'D' l'image de ABCD par la réflexion de droite H. Montrer que ABCD et A'B'C'D' sont T-équidécomposables.

*c.* En déduire que deux rectangles d'aires égales sont T-équidécomposables.

II.6. A quelle condition deux polygones sont-ils S-équidécomposables?

II.7. Soit $\mathcal{A}$ le groupe des applications de l'ensemble des vecteurs non nuls du plan E dans $\mathbb{R}$ et soit l'application $\beta$ de $\Pi_c$ dans $\mathcal{A}$ définie comme suit : soit P un polygone convexe de sommets consécutifs $A_1, ..., A_s, A_{s+1} = A_1$, de sorte que les droites faciales de P sont les droites $A_iA_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ et M un point intérieur à P. On pose, pour tout vecteur non nul $\vec{v}$,

$$\beta(P)(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i(\vec{v}) \, ||\overrightarrow{A_iA_{i+1}}||$$

où :

$$\varepsilon_i(\vec{v}) = 0 \text{ si } \vec{v}.\overrightarrow{A_iA_{i+1}} \neq 0$$

$$\varepsilon_i(\vec{v}) = +1 \text{ si } \vec{v}.\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = 0 \text{ et } \vec{v}.\overrightarrow{MA_i} > 0$$

$$\varepsilon_i(\vec{v}) = -1 \text{ si } \vec{v}.\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = 0 \text{ et } \vec{v}.\overrightarrow{MA_i} < 0$$

*a.* L'application $\beta$ dépend-elle du choix de M?

*b.* Montrer que $\beta$ s'étend en un invariant de T-découpage.

*c.* A quelle condition deux triangles sont-ils T-équidécomposables?

**Tournez la page S. V, P.**

## Partie III. — ÉQUIDÉCOMPOSABILITÉ DANS L'ESPACE

On suppose dorénavant $n = 3$. Dans cette partie, on aborde l'étude de l'équidécomposabilité des polyèdres de E, c'est-à-dire de l'équidécomposabilité sous le groupe de toutes les isométries de E. On écrira simplement $P \approx Q$ si les polyèdres P et Q sont équidécomposables.

III.1. Établir que, si P et Q sont deux parallélépipèdes rectangles de même volume, alors $P \approx Q$.

III.2. *a.* Étant donné un polygone B d'un plan P et un vecteur $\vec{v}$ non parallèle à P, montrer que l'ensemble des points $M + t\vec{v}$, où $M \in B$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, est un polyèdre, qu'on appellera un prisme de base B; ce prisme est dit droit si $\vec{v}$ est orthogonal à P.

*b.* Tout prisme est-il équidécomposable à un cube? On commencera par étudier le cas des prismes droits.

III.3. On donne dans un repère orthonormé $Oxyz$, le tétraèdre V de sommets les points $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, et $(1, 1, 1)$.

*a.* Montrer que le cube défini par $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ admet une décomposition en 6 tétraèdres isométriques à V.

*b.* Pour tout entier $m \geqslant 2$, exhiber une décomposition de V en $m^3$ tétraèdres semblables à V.

*N.B.* : Ici, et dans la suite, « P est semblable à Q dans le rapport $t > 0$ » signifie que P se déduit de Q par la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport $t$; on ne distingue donc pas les similitudes directes et inverses.

*c.* Déduire de ce qui précède que V est équidécomposable à un cube.

## Partie IV. — L'ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Une application $f$ d'un ensemble X dans $\mathbb{Z}$ est dite à support fini si l'ensemble des éléments $x$ de X tels que $f(x) \neq 0$ est fini (éventuellement vide). L'ensemble des applications à support fini de X dans $\mathbb{Z}$ est manifestement un groupe abélien pour l'addition des applications (on ne demande pas de le vérifier), noté $\mathbb{Z}^{(X)}$.

On prend désormais pour X le produit cartésien $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ de deux groupes abéliens $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$; si, pour $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$, $\chi_{(a,b)}$ désigne la fonction qui vaut 1 au point $(a, b)$ et 0 en tout autre point de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, tout élément $f$ de $\mathbb{Z}^{(\mathcal{A} \times \mathcal{B})}$ a l'écriture :

$$f = \sum f(a, b)\, \chi_{(a,b)}$$

où les $f(a, b)$ sont des entiers relatifs tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

On désigne par $\mathcal{R}$ le sous-groupe de $\mathbb{Z}^{(\mathcal{A} \times \mathcal{B})}$ engendré par les éléments de la forme :

$$\chi_{(a,b)} + \chi_{(a',b)} - \chi_{(a+a',b)}$$

et

$$\chi_{(a,b)} + \chi_{(a,b')} - \chi_{(a,b+b')}$$

où $a$ et $a'$ (resp. $b$ et $b'$) varient arbitrairement dans $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$).

On note alors $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ le groupe quotient $\mathbb{Z}^{(\mathcal{A} \times \mathcal{B})}/\mathcal{R}$ et, pour tout $(a, b)$ dans $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, on note $a \otimes b$ la classe de $\chi_{(a,b)}$ modulo $\mathcal{R}$.

Le groupe $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est dit produit tensoriel de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

IV.1.*a.* Établir que l'ensemble des $a \otimes b$, où $(a, b)$ parcourt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, est une partie génératrice du groupe $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

*b.* Une application $f$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ dans un groupe abélien $\mathcal{C}$ sera dite biadditive si les applications :

$$a \longmapsto f(a, b) \qquad \text{et} \qquad b \longmapsto f(a, b)$$

de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$ respectivement sont des homomorphismes.

Établir que l'application $p$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ définie par :

$$(a, b) \longmapsto a \otimes b$$

est biadditive.

*c.* Le symbole 0 désignant indifféremment les éléments neutres de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, établir :

$$\forall a \in \mathcal{A},\ \forall b \in \mathcal{B}, \qquad 0 \otimes b = a \otimes 0 = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall a \in \mathcal{A},\ \forall b \in \mathcal{B}, \qquad (na) \otimes b = a \otimes (nb) = n\,(a \otimes b)$$

IV.2. Montrer que, si $f$ est une application biadditive de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ dans un groupe abélien $\mathcal{C}$, il existe un unique homomorphisme $\overline{f}$ de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$ tel que $f = \overline{f}.p$.

IV.3. On suppose ici que $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel sur le corps commutatif K, et que $\mathcal{B}$ est un groupe abélien quelconque. On définit une action de K sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ par :

$$\forall k \in \mathrm{K},\ \forall a \in \mathcal{A},\ \forall b \in \mathcal{B}, \quad k.(a \otimes b) = (ka) \otimes b$$

Vérifier que cela définit sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ une structure de K-espace vectoriel.

Le seul exemple de produit tensoriel de deux groupes abéliens qui sera utilisé dans la suite sera $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, qui a, d'après ce que l'on vient de voir, une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ telle que, si $\overline{z}$ désigne la classe modulo $\mathbb{Z}$ du réel $z$ (notation qui sera désormais utilisée systématiquement).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (xy) \otimes \overline{z} = x\,(y \otimes \overline{z})$$

IV.4. Établir que l'on a dans $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{Q}, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad x \otimes (\overline{yz}) = (xy) \otimes \overline{z}$$

Dans la suite, on admet la possibilité de compléter toute famille de réels linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ en une base de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$.

IV.5. *a.* Établir l'existence, pour tout nombre irrationnel $y$, d'un homomorphisme du groupe $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Q}$ tel que 1 ait pour image 0 et $y$ pour image 1.

*b.* Soient $x$ et $y$ deux réels, $x \neq 0$; montrer que l'élément $x \otimes \overline{y}$ de $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est nul si et seulement si $y$ est rationnel.

*c.* Montrer que si une famille $(z_j)$ de réels est libre sur $\mathbb{Q}$ et si 1 n'est pas engendré par cette famille, alors la famille $(1 \otimes \overline{z_j})$ est libre dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

IV.6. *a.* Établir l'existence d'une suite de polynômes $(\mathrm{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

*b.* Calculer le terme de plus haut degré de $\mathrm{T}_n$ et son terme constant.

*c.* On donne un réel $\theta = \pi p/q$, où $p/q \in \mathbb{Q}$, tel que $\cos\theta \in \mathbb{Q}$. Donner les différentes valeurs possibles de $\cos\theta$ ; on commencera par le cas où $q$ est impair : on montrera que $\cos\theta$ est de la forme $2^{-s}$ ou $-2^{-s}$, avec $s \in \mathbb{N}$, puis que $s = 0$ ou 1. On étudiera ensuite le cas où $q$ est pair.

*d.* Soit $\theta_0$ l'angle dièdre intérieur de deux faces d'un tétraèdre régulier. Calculer $\cos\theta_0$. Que peut-on dire de $\theta_0/\pi$?

## Partie V. — L'INVARIANT DE DEHN

On rappelle que $n = 3$. On se propose dans cette dernière partie de définir un invariant de découpage pour les polyèdres de l'espace.

Soit P un polyèdre convexe, c'est-à-dire un polytope de E; les côtés des faces de P sont appelés arêtes de P et constituent un ensemble de segments noté $\mathbf{A}(\mathrm{P})$; à chaque arête $a$ est associée une unique paire $\{\mathrm{H}, \mathrm{H}'\}$ de plans faciaux de P telle que $a$ soit l'intersection de P, H et H'. On désigne par $\theta(a)$ une mesure en radians de l'angle dièdre limité par H et H' qui contient P, et par $\mathrm{l}(a)$ la longueur du segment $a$. On pose enfin :

$$\Delta(\mathrm{P}) = \sum_{a \in \mathbf{A}(\mathrm{P})} \mathrm{l}(a) \otimes \overline{(\theta(a)/\pi)} \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

ce qui définit une application de $\Pi_c$ dans $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

V.1. Montrer que $\Delta$ s'étend en un invariant de découpage, qu'on appelle l'invariant de Dehn.

V.2. *a.* Quel est l'invariant de Dehn du tétraèdre V étudié en III.3? Quel est celui d'un cube? Celui d'un prisme?

*b.* Quel est l'invariant de Dehn d'un tétraèdre régulier d'arête 1? Un tétraèdre régulier est-il équidécomposable à un cube?

V.3. Soit P un polyèdre tel que $\Delta(\mathrm{P}) \neq 0$.

*a.* On donne $m$ réels strictement positifs $t_1, t_2, \ldots, t_m$ et $m$ polyèdres $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_m$ d'intérieurs deux à deux disjoints et tels que, pour tout $i$ variant de 1 à $m$, $\mathrm{P}_i$ soit semblable à P dans le rapport $t_i$; soit Q la réunion des $\mathrm{P}_i$. Calculer le volume $v(\mathrm{Q})$ de Q et $\Delta(\mathrm{Q})$ en fonction de $v(\mathrm{P})$, de $\Delta(\mathrm{P})$ et des nombres $t_i$.

*b.* En déduire l'existence, pour tout réel $t \geqslant 1$, d'un polyèdre $\mathrm{P}_t$ tel que

$$v(\mathrm{P}_t) = v(\mathrm{P}) \qquad \text{et} \qquad \Delta(\mathrm{P}_t) = t \,.\, \Delta(\mathrm{P})$$

*c.* Étendre ce résultat au cas $0 < t < 1$.

*d.* Montrer l'existence d'un polyèdre P′ tel que $\Delta(\mathrm{P}') = -\Delta(\mathrm{P})$.

*e.* Étendre enfin le résultat du *b.* au cas d'un réel $t$ quelconque.

V.4. Montrer que l'ensemble des valeurs de $\Delta(\mathrm{P})$, lorsque P décrit l'ensemble des polyèdres ayant un volume donné non nul $v_0$, est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et indépendant de $v_0$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Soit $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de E. On considère l'enveloppe convexe D des 20 points dont les coordonnées dans ce repère sont :

$$(\pm\rho/2\,,\ \pm\rho/2\,,\ \pm\rho/2)\,, \qquad (\pm\rho^2/2\,,\ 0,\ \pm 1/2)\,, \qquad (\pm 1/2\,,\ \pm\rho^2/2\,,\ 0)\,, \qquad (0\,,\ \pm 1/2\,,\ \pm\rho^2/2)$$

où $\rho = (1+\sqrt{5})/2$ est la racine positive de l'équation $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1 = 0$. Le polyèdre D est un dodécaèdre régulier.

V.5. Dessiner la projection de D sur le plan $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\theta_{\mathrm{D}}$ l'angle dièdre intérieur de deux faces adjacentes de D. Montrer que :

$$\cos\theta_{\mathrm{D}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Calculer $\Delta(\mathrm{D})$ en fonction de $\theta_{\mathrm{D}}$.

V.6. En déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{Z} - \{0\}\,,\ \operatorname{tg} m\,\theta_{\mathrm{D}} \in \mathbb{Q}^*$$

V.7. On rappelle que l'enveloppe convexe des centres de gravité des faces de D est un icosaèdre régulier. Soit $\theta_{\mathrm{I}}$ l'angle dièdre intérieur de deux faces d'un icosaèdre régulier. Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{Z} - \{0\}\,, \quad \operatorname{tg} m\,\theta_{\mathrm{I}} \in \mathbb{Q}^*.\sqrt{5}$$

V.8. Montrer que les réels $\pi, \theta_{\mathrm{D}}, \theta_{\mathrm{I}}, \theta_0$, où l'on rappelle que $\theta_0$ est l'angle dièdre de deux faces d'un tétraèdre régulier (cf. IV.6.*d.*), sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

Que peut-on en conclure?